

УДК 622.817.4

**Вознюк Ю. С.,  
к.т.н. Павлов В. И.**  
(ДонГТИ, г. Алчевск, ЛНР, pavlow2005@rambler.ru)

## К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ПОПУЛЯЦИИ

*Проанализированы существующие модели развития популяции. Приведены статистические оценки параметров моделей Мальтуса и Ферхюльста на примере изменения численности фаза-нов в Запорожской области. На основе модели Ферхюльста установлены основные характеристики популяции и перспективы её развития.*

**Ключевые слова:** техногенная нагрузка, популяция, развитие, модели развития, форма связи, корреляционно-регрессионный анализ, расчет, характеристики развития.

**Постановка проблемы, обоснование ее актуальности.** Техногенная нагрузка угле-металлургического комплекса Донбасса оказывает угнетающее влияние на состояние окружающей среды. Свободные степные пространства, почвенный слой которых представлен плодородными чернозёмами, практически повсеместно используется под сельскохозяйственные нужды. Вследствие этого нарушен ареал обитания диких животных. Территории для их размножения, зимовки, питания, миграционные пути сокращены до критических размеров и поэтому популяции их отдельных видов уменьшаются. Постоянно увеличивается список представителей флоры и фауны, находящихся под угрозой исчезновения. Для разработки мероприятий по сохранению и восстановлению экосистем особую актуальной приобретает оценка состояния популяций видов животных, обитающих на наших территориях.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Состояние популяции характеризуется статическими и динамическими показателями. К статистическим показателям относятся численность, плотность, структура, к динамическим — рождаемость, смертность, скорость роста популяции.

Развитие любой популяции, включая и человечество, подчиняется одним и тем же общим закономерностям. Всемирно известна математическая модель английского экономиста и демографа Мальтуса. В её

основу положены статические и динамические показатели:

$x$  — численность популяции в рассматриваемый момент времени, тыс. особей;

$A$  — количество родившихся особей за период времени  $\Delta t$ , особей.;

$B$  — количество умерших особей за период времени  $\Delta t$ ;

Удельная рождаемость — количество новорожденных за год, приходящихся на 1000 особей рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \frac{A}{x \cdot \Delta t} . \quad (1)$$

Удельная смертность определяется аналогично:

$$\beta = \frac{B}{x \cdot \Delta t} . \quad (2)$$

Прирост численности рассчитывается как разница между родившимися и умершими особями по формуле:

$$\Delta x = A - B = (\alpha - \beta) \cdot x \cdot \Delta t . \quad (3)$$

Разность между удельной рождаемостью и удельной смертностью обозначена как удельный прирост популяции

$$\gamma = \alpha - \beta , \quad (4)$$

$$\Delta x = \gamma \cdot x \cdot \Delta t . \quad (5)$$

Искомый динамический показатель, скорость роста популяции имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \gamma \cdot x. \quad (6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6), модель Мальтуса имеет вид

$$x = C_1 \cdot e^{\gamma \cdot t}, \quad (7)$$

где  $C_1 = x_0$  — количество особей в начальный момент времени;  $\gamma$  — удельный прирост популяции, величина постоянная.

Как следует из этой модели, численность популяции  $x$  с увеличением времени существования популяции  $t$  должна расти до бесконечности. Модель Мальтуса адекватно описывает развитие популяции при наличии достаточных ресурсов, необходимых для существования популяции, но при постепенном исчерпании ресурсов популяции модель становится неадекватной. Поэтому бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст ввел в уравнение (6) ограничивающую поправку и получил уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \gamma \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad (8)$$

где  $k$  — максимальное количество особей, которое может прокормиться на данной территории.

Согласно этому уравнению при росте популяции  $x$  до величины  $k$  поправка Ферхюльста  $\left(1 - \frac{x}{k}\right)$  становится равной нулю и, соответственно, скорость роста популяции прекращается  $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ . Решение уравнения (модель Ферхюльста) имеет вид

$$x = \frac{k \cdot x_0 \cdot e^{\gamma \cdot t}}{k - x_0 + x_0 \cdot e^{\gamma \cdot t}}. \quad (9)$$

Эту функцию называют логистической. Функция имеет точку перегиба, разделяющую периоды ускоренного роста и замедления, соответственно первый и второй периоды, выделенные на рисунке 1. Из урав-

нения (9), следует, что значение  $t^*$  для точки перегиба можно определить по формуле

$$t^* = \frac{1}{\gamma} \cdot \ln \frac{k - x_0}{x_0}. \quad (10)$$

Таким образом, модель Ферхюльста позволяет оценить состояние популяции в ареале её обитания в период достаточности ресурсов и в период их исчерпания.

**Цель исследований** — по фактическим данным о численности фазанов в Запорожской области установить состояние популяции и перспективы её роста.

**Задачи исследований:**

- используя статистические данные о численности популяции фазанов, оценить параметры моделей Мальтуса и Ферхюльста;
- установить статические и динамические характеристики популяции;
- оценить перспективы её развития.

**Изложение материала и его результаты.** В работе использован корреляционно-регрессивный метод оценки формы связи [4] по моделям Мальтуса и Ферхюльста. Данные о численности фазанов с 1981 по 2013 годы взяты из работы [3].

С помощью пакета прикладных статистических программ Statistica 6.0 получены статистически значимые оценки параметров исследуемых моделей. Надежность уравнений регрессии подтверждается значимыми высокими коэффициентами корреляции (табл. 1).

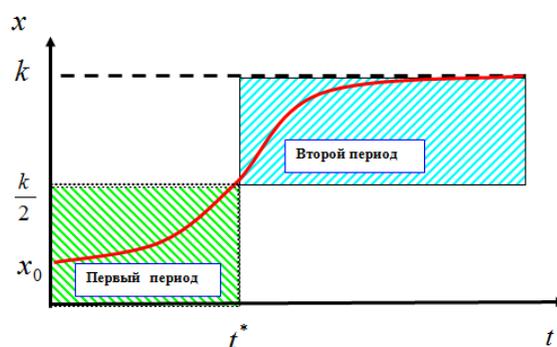


Рисунок 1 Координаты точки перегиба логистической функции

**ЭКОЛОГИЯ**

Таблица 1  
Оценки параметров моделей развития

Модель	Параметр			Коэффициент корреляции
	$x_0$	$\gamma$	$k$	
Мальтуса	6053	0,064	–	0,94
Ферхюльста	6060	0,08	70850	0,98

Уравнения развития популяции имеют вид – по модели Мальтуса

$$x = 6,053 \cdot e^{0,064t}, \text{ тыс. особ.}; \quad (11)$$

– по модели Ферхюльста

$$x = \frac{429351 \cdot e^{0,08t}}{64790 + 6060 \cdot e^{0,08t}}, \text{ тыс. особ.} \quad (12)$$

Из модели Ферхюльста следует, что удельный годовой прирост фазанов составляет 0,08, т. е. 8 особей на каждые 100 особей популяции в год. Скорость роста популяции достигла точки максимума в 2011 г при численности 37300 особей (рис. 2).

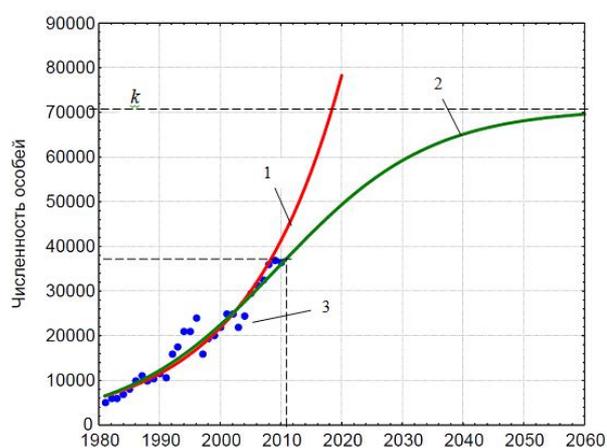
Значения численности популяции по сравниваемым моделям близки в начальный период роста. Существенное отклонение скорости роста популяции от фактических данных по модели Мальтуса возникает к 2010 г (табл. 2), отклонение составило 71,4 %. По модели Ферхюльста отклонение — 7,1 %, в 10 раз меньше.

Максимальная скорость роста популяции составила 1340 особей в год. Период

сравнительно высокого роста популяции составил 20 лет.

После достижения максимальной скорости роста прирост популяции заметно сокращается из-за нехватки природной пищевой базы. Популяция будет создавать проблемы для населения, так как будет вынуждена восполнять нехватку природных кормов потреблением сельскохозяйственной продукции.

Теоретически, популяция фазанов в Запорожской области может достигнуть предельной максимальной численности 70850 особей в 2060 г.



1 — модель Мальтуса, 2 — модель Ферхюльста

Рисунок 2 Графический анализ моделей по фактическим данным

Сравнительные характеристики по моделям

Таблица 2

Характеристика популяции	Модель	Значение	
		расчетное	фактическое
Начальная численность, особ.	Мальтуса	6053	6020
	Ферхюльста	6060	6020
Скорость роста в 2010 г., особ./г.	Мальтуса	2400	1400
	Ферхюльста	1300	
Максимальная скорость роста, особ./г.	Мальтуса	не ограничена	-
	Ферхюльста	1340	-
Период максимального роста, лет	Ферхюльста	2000–2020	-
Максимально возможная численность, особ.	Ферхюльста	70850	-

**Выводы.** Использование модели Ферхюльста позволяет установить следующие важные характеристики состояния и перспективы развития популяции:

– время и численность популяции при переходе от ускоренного к замедленному развитию;

– удельный прирост численности;  
– предельное значение численности популяции на данной территории;  
– возможный абсолютный прирост популяции за любой период.

#### Библиографический список

1. Конвенция о биологическом разнообразии [Электронный ресурс] / ООН. — Режим доступа: [https://www.un.org/ru/documents/decl\\_conv/conventions/biodiv.shtml](https://www.un.org/ru/documents/decl_conv/conventions/biodiv.shtml).
2. Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов [Текст] / под ред. И. В. Ильина, Д. И. Трубецкого. — М. : Изд-во МГУ, 2010. — 412 с.
3. Николаев, В. А. Динамика численности охотничьего фазана в Запорожской области [Текст] / В. А. Николаев // Современные проблемы природопользования, охотоведения и звероводства. — 2012. — № 1. — С. 561–562.
4. Подлипенская, Л. Е. Математическая статистика для горняков [Текст] : учеб. пособ. / Л. Е. Подлипенская, С. И. Кулакова. — Алчевск : ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», 2022. — 165 с.

© Вознюк Ю. С.

© Павлов В. И.

*Рекомендована к печати начальником НИЧ ДонГТИ к.т.н., доц. Проценко М. Ю., к.б.н., доц. каф. ЭБЖД ДонГТИ Швыдченко С. С.*

Статья поступила в редакцию 12.10.2022.

**Voznyuk Yu. S., Ph. D. Pavlov V. I.** (DonSTI, Alchevsk, LPR, [pavlow2005@rambler.ru](mailto:pavlow2005@rambler.ru))

#### ON THE ISSUE OF ASSESSING THE STATE OF THE POPULATION

*The existing models of population development have been analyzed. Statistical assessment of the Malthus and Verhulst models' parameters are given on the example of quantity changes pheasants in the Zaporozhiye region. Based on the Verhulst model, the main characteristics of the population and the prospects for its development are established.*

**Key words:** *technogenic load, population, development, development models, connection form, correlation-regression analysis, calculation, development characteristics.*